



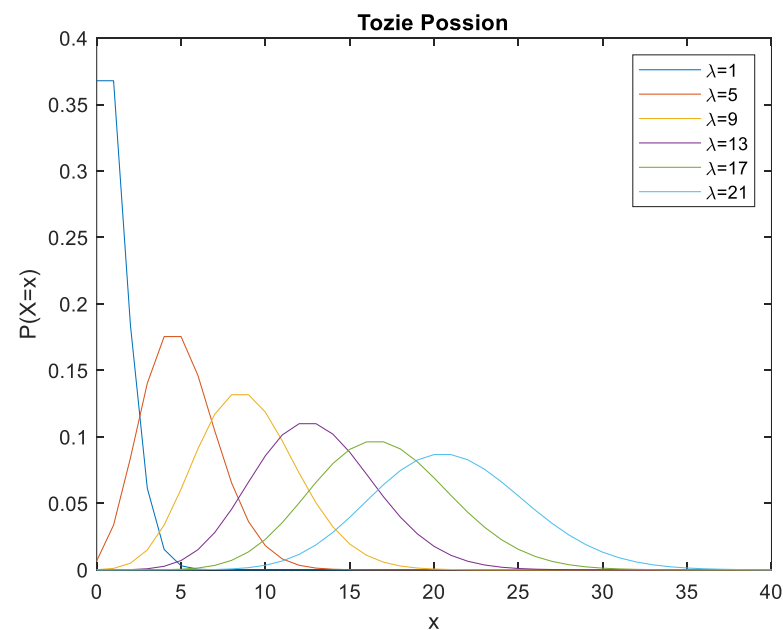
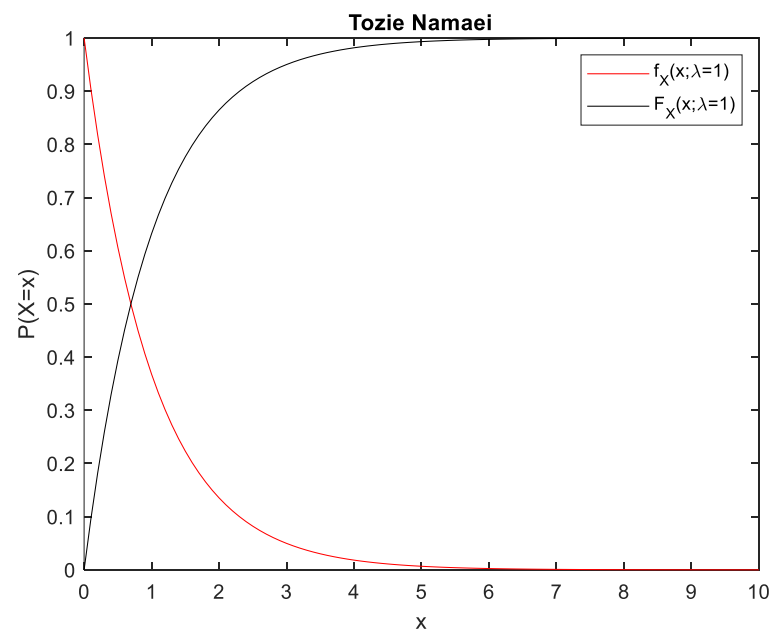
فرآیندهای تصادفی
فرآیندهای پواسن

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

توزیع پواسن در مقابل توزیع نمائی

چولگی	وردائی	میانگین	تابع تجمیع	چگالی یا جرم	فرایند	نوع فرایند
$\frac{1-2\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$	$n\theta(1-\theta)$	$n\theta$	$F(x; n, \theta) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i}$	$f(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$	دوجمله‌ای	گسسته
$\lambda^{-\frac{1}{2}}$	λ	λ	$F(x, \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^x \frac{\lambda^i}{i!}$	$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	پواسن	
۲	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$	$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$	نمائی	پیوسته

نمودار توزیع پواسن و توزیع نمائی



عدد اویلر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = ?$$

عدد اویلر

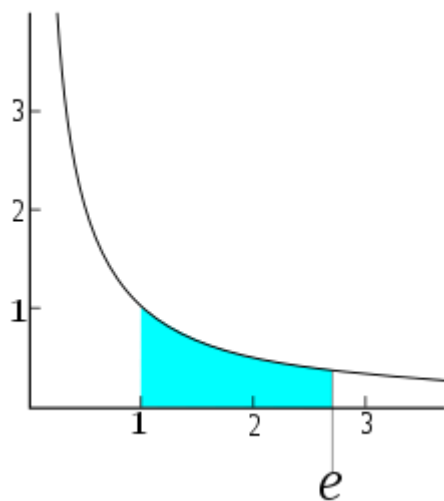
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = ?$$

عدد اویلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = ?$$

ناحیه زیر منحنی $y = \frac{1}{x}$ بین ۱ و e برابر یک

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$



فرایند پواسن

از پراستفاده‌ها

شمارش رخداد پیشامدهای خاص

- که با آهنگ یا سرعت خاصی اتفاق می‌افتند
- اما کاملاً تصادفی

پس جهت پیش‌بینی تعداد رخدادهایی که در آینده رخ خواهند داد

- یا پیش‌بینی احتمال رخداد تعداد مشخصی از پیشامدها در بازه‌ای ثابت
- مثال

- تعداد بازدیدکنندگان تارمانه شما در روز
- تعداد کلیک تبلیغاتی در ماه بعدی
- تعداد تماس‌های تلفنی دریافتی در زمان حضور در کار
- تعداد مرگ و میر ناشی از بیماری کشنده در سال آینده
- زلزله
- تعداد تصادفات خودرو در مانه یا منطقه‌ای خاص
- محل کاربران در شبکه بی‌سیم
- درخواست دسترسی به مستندات متمایز روی سرور وب
- آغاز جنگ‌ها
- فوتون‌هایی که بر فتودیود فرود می‌آیند

توزیع دوجمله‌ای

امتحان‌های تکراری

احتمال تمام پیروزی‌ها برابر با θ

هر پرتاب (آزمایش) مستقل از دیگر آزمایش‌ها

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, \theta)$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

ویژگی‌ها

احتمال تجمیعی

$$B(x; n, \theta) = \sum_{k=0}^x b(x; n, \theta)$$

$$b(x; n, \theta) = b(n - x; n, 1 - \theta)$$

$$\mu = n\theta$$

$$\sigma^2 = n\theta(1 - \theta)$$

مثال

۱۷ نفر میانگین افرادی هستند که در هر هفته به دانشگاه کمک مالی می‌کنند.

مهم چون افراد مذکور به نهاد مذکور کمک مالی می‌کنند.

سوال - احتمال اینکه هفته بعد دقیقاً بیست نفر پست‌های وی را تایید کنند.

حل

- آغاز با تعداد باز دیده‌ها
- هر شخص که پست‌ها را مطالعه می‌کند دارای احتمال اینکه مطلب را دوست داشته باشد و کمک مالی کند
- روش معمول توزیع دوجمله‌ای
- به دلیل محاسبه احتمال تعداد رخ داده‌های موفق (پرداخت‌ها)
- متغیر تصادفی دوجمله‌ای
- تعداد x موفقیت از n آزمایش متوالی
- با فرض احتمال موفقیت θ در هر آزمایش

مثال -

اما صرفا دارای اطلاع از میانگین پرداختها در هفته ۱۷ نفر در هفته

▪ آهنگ rate

▪ یا امید ریاضی x

▪ به دیگر سخن بی اطلاعی از احتمال پرداخت p و همچنین بی اطلاعی از تعداد ملاقات کننده روزانه n

▪ تلاش برای یافتن آنها از داده قبلی

▪ فرضا وجود آمار یک ساله و تعداد کلا مراجعان ۵۹ هزار نفر

▪ ۸۸۸ نفر پرداخت داشتند.

$$n = \frac{59000}{52} = 1134 \text{ پس تعداد مراجعه در هفته } 1134$$

$$x = \frac{888}{52} = 17 \text{ و تعداد پرداخت در هفته } 17$$

$$\theta = \frac{888}{59000} = 0.015 \text{ یا } 1.5\% \text{ احتمال موفقیت}$$

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$
$$= \binom{1134}{17} \cdot 0.015^{17} \cdot (1 - 0.015)^{1134-17} = 0.06962$$

مثال -

▪ احتمال دو جمله‌ای برای X های متفاوت

x	$b(X = x)$
۱۰	۰.۰۲۲۵۰
۱۷	۰.۰۹۷۰۱
۲۰	۰.۰۶۹۶۲
۳۰	۰.۰۰۱۲۱
۴۰	< ۰.۰۰۰۰۰۱

مثال - ادامه

▪ تعداد پرداخت در هفته ۱۷

$$\frac{17}{7} = 2.4 \text{ تعداد پرداخت در روز}$$

$$\frac{17}{7 \times 24} = 0.1 \text{ تعداد پرداخت در ساعت}$$

استفاده از توزیع دوجمله‌ای برای احتمال ساعتی ۰,۱ پرداخت بر ساعت

▪ به معنای پرداخت صفر در بیشتر ساعت‌ها

▪ ولی بعضی ساعت‌ها دقیقاً یک پرداخت

▪ اما در عمل امکان پرداخت بیش از یک در بعضی از ساعات

▪ ← ایرادهای توزیع دوجمله‌ای

▪ عدم امکان رخداد بیشتر از یک پیشامد در واحد زمان

▪ یا یک یا هیچ پیشامد در هر واحد زمان

مثال - ادامه

- حل؟ تقسیم یک ساعت به شصت دقیقه و کوچکتر کردن واحدهای زمانی.
- یک ساعت امکان داشتن بیشتر از یک پیشامد
- اما دقیقه هنوز دارای دقیقا یک یا هیچ پیشامد
- به نظر حل مسئله
- ولی اگر به دنبال چند پرداخت در دقیقه، جوابگو نیست
- تقسیم به ثانیه
- روز از نو روزی از نو
- مسئله دودوئی بودن متغیر تصادفی دوجمله‌ای

مثال - ادامه

پس با تقسیم‌بندی کوچکتر، داشتن چند پیشامد در واحد اصلی زمان

$$n \rightarrow \infty$$

با فرض ثابت بودن سرعت و میزان

$$\theta \rightarrow 0$$

وگرنه $n\theta$ مقدار بی‌نهایت خواهد گرفت

استفاده از حد

واحدهای زمانی بی‌نهایت کوچک

عدم نیاز توجه به رخداد تک پیشامد در واحد زمانی

نحوه عملکرد توزیع پواسنی

مثال - ادامه

عدم امکان استفاده از دو جمله‌ای برای محاسبه احتمال موفقیت با بکارگیری سرعت و میزان

- بلکه نیاز به اطلاعات بیشتر n و θ

توزیع پواسن

- عدم نیاز به دانستن n یا θ
- با فرض بی‌نهایت بزرگی n و θ بی‌نهایت کوچک
- پس تنها ضریب و عامل مورد نیاز λ امید ریاضی x
- در زندگی واقع دانستن تعداد سه تماس تلفنی در ساعت ۲ تا ۴ معمول تر از دانستن n و θ

تحويل دو جمله‌ای به پواسن

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b(x; n, \theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)! x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{n^x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{n^x} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

قضیهٔ تحویل توزیع دو جمله‌ای به توزیع پواسن

$$X \sim \text{دو جمله‌ای}(x; n, \theta)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta = \lambda > 0 \text{ مقدار ثابت و}$$

آن‌گاه

▪ با $n \rightarrow \infty$ احتمال جرم X به احتمال جرم پواسن همگرا می‌شود پس برای $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

توزیع پواسن

پیشامدی $0, 1, 2, \dots$ بار در بازه‌ای رخ می‌دهد. λ تعداد میانگین پیشامدها در بازه آهنگ یا میزان پیشامد است. احتمال مشاهده x پیشامد در بازه برابر است با

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

به طوری که

- λ
- e عدد اویلر (نپر) و پایه لگاریتم طبیعی و برابر $2.71828 \dots$
- x مقادیر $0, 1, 2, \dots$
- $x! = x \times (x - 1) \times (x - 2) \times \dots \times 2 \times 1$

مثال -

▪ احتمال دو جمله‌ای برای X های متفاوت

x	$b(X = x)$	$Possion(X = x; \lambda = ۱۷)$
۱۰	۰.۰۲۲۵۰	۰.۰۲۳۰۰
۱۷	۰.۰۹۷۰۱	۰.۰۹۶۲۸
۲۰	۰.۰۶۹۶۲	۰.۰۷۵۹۵
۳۰	۰.۰۰۱۲۱	۰.۰۰۳۴۰
۴۰	< ۰.۰۰۰۰۰۱	< ۰.۰۰۰۰۰۱

چند ویژگی

توزیع پواسن مورد استفاده برای مدل سازی پیشامدهای نادر

▪ اما λ می تواند هر عددی را اختیار کند

▪ عدم نیاز به کوچک بودن مقدار

توزیعی نامتقارن

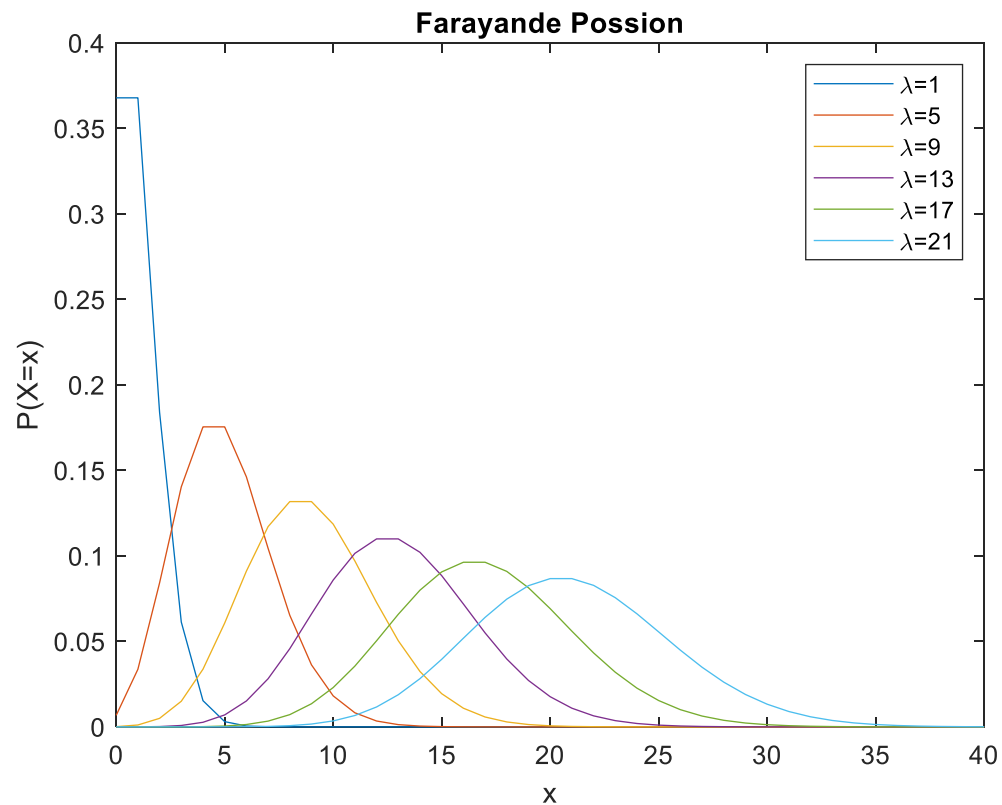
▪ همیشه چولگی به سمت راست

▪ محدود به رخداد صفر از سمت چپ

▪ پرداخت منفی یکبار وجود ندارد

▪ بدون محدودیت در سوی دیگر

λ بزرگتر، نمودار شبیه تر به توزیع نرمال



چند ویژگی - ادامه

ثابت بودن سرعت میانگین در واحد زمان

- فرضاً بازدید ساعتی در طول روز بیشتر در طول شب کمتر
- بهتر است تغییر به سرعت ماهانه تخمین بهتر
- تاثیر فصلی نامهم

استقلال رخدادها

- لزوماً بازدید امری مستقل نیست
- مراجعه به خاطر تبلیغ تاثیرگذاران
- یا در مجله‌ای اینترنتی در صفحه اول قرار گرفته است
- تعداد زلزله سالانه کشور ممکن است توزیع پواسن نباشد چرا که زلزله بزرگی موجب پس لرزه‌های بیشتر

رابطه بین توزیع نمائی و پواسن

- در صورتی که تبعیت **تعداد** پیشامدی در واحد زمان از توزیع پواسن
- تبعیت **زمان** بین پیشامدها از توزیع نمائی
- با وجود گسسته بودن توزیع پواسن و پیوسته بودن توزیع نمائی
- ارتباط سخت تنگاتنگ این دو توزیع

توزیع نمائی

دلیل استفاده از توزیع مذکور

- پیش بینی مقدار زمان انتظار تا پیشامد بعدی
▪ مثلاً پیروزی، شکست، دریافت
- مقداری از زمان تا مشتری جستجو را تمام کند و خرید واقعی محصولی را در فروشگاه به انجام رساند
▪ پیروزی
- مقداری از زمان تا خراب شدن سخت افزار روی رایانه
▪ شکست
- مقدار زمان انتظار تا رسیدن اتوبوس
▪ ورود

توزیع نمائی

$$X \sim e^\lambda$$

- λ بازه زمانی نیست
- بلکه آهنگ و سرعت یا میزان رخداد پیشامد است
- شبیه پارامتر توزیع پواسنی
- آهنگ بازدیدکنندگان بلاگ و صفحه درس ۵ نفر در هفته!
- تعداد مشتریان که در ساعت به فروشگاه مراجعه می کنند
- تعداد زلزله‌ها در سال
- تعداد خودرو تصادفی در هفته
- تعداد موهای یافت شده در کتلت مهدی
- تعداد غلت‌ها در اصلاحیها
- همگی آهنگ در واحد زمان
- پس دقیقا همانند توزیع پواسن

توزیع نمائی

اما جهت مدل کردن زمان اتلافی بین وقایع

- بدنبال صحبت از زمان تا سرعت
- تعداد سال‌های کار کامپیوتر بدون خرابی ۱۰ سال
- به جای گفتن ۰,۱ خرابی در سال
- مراجعه هر مشتری در هر ۱۰ دقیقه
- زلزله‌های شدید هر پنج سال یکبار

اصطلاح میانگین توزیع نمائی $\frac{1}{\lambda}$

- معنائی است که در مثال‌های اخیر مستفاد شد
- پارامتر زوال (سرعت زوال)
- بیان بر پایه زمان
- هر ده دقیقه، هر هفت سال
- معکوس آهنگ پواسن
- سه مشتری در ساعت، به معنای یک مشتری در هر $\frac{1}{3}$ ساعت

توزیع نمائی

$$X \sim e^{0.25}$$

- آهنگ پواسن برابر ۰.۲۵ در واحد زمان
- دقیقه، ساعت، سال
- وقوع پیشامد با میانگین ۰.۲۵ زمان تا رخ دادن آن
- تبدیل به زمان
- چهار ساعت تا زمان رخداد

توزیع نمائی - تابع چگالی

تعریف توزیع نمائی

- توزیع احتمالی زمانی بین پیشامدها (وقایع) در فرایند پواسنی
- زمان لازم تا پیشامد رخ دهد
- در بازه انتظار هیچ پیشامدی اتفاق نیفتاده است
- به دیگر سخن

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$
$$x = 0 \Rightarrow p(0; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

توزیع نمائی - تابع چگالی

- باید در نظر داشت که تابع پواسن بازه زمانی که پیشامد پواسنی $X=x$ در یک واحد زمانی رخ می‌دهد در صورتی که به دنبال توزیع احتمال رخ ندادنی پیشامدی در بازه زمانی t و نه یک

$$p(\sim t)$$

- برابر است با ضرب اتفاق نیفتادن در بازه زمانی نخست در اتفاق نیفتادن در بازه زمانی دوم تا اتفاق نیفتادن در بازه زمانی t -ام

$$p(\sim t) = e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} \times \dots \times e^{-\lambda} = e^{-\lambda t}$$

- فرض توزیع پواسنی \Leftarrow وقوع پیشامدها مستقل از یکدیگر
- بنابراین محاسبه احتمال صفر پیروزی در t زمان با ضرب تک تک آن‌ها

$$p(T > t) = p(X = 0 \text{ در } t \text{ زمان}) = e^{-\lambda t}$$

- T که بدنبال بررسی آن هستیم
- متغیر تصادفی زمان انتظار تا اولین پیشامد
- X تعداد پیشامدهای در آینده که از فاصله پواسنی تبعیت می‌کند

$$p(T > t)$$

- احتمال زمان انتظار تا اولین پیشامد بزرگتر از t واحد زمانی

$$p(X = 0 \text{ در } t \text{ زمان})$$

- احتمال صفر پیروزی در t واحد زمانی

توزیع نمائی - تابع چگالی

- تابع چگالی

- مشتق تابع تجمیعی

- $P(T > t)$ تابع تجمیعی و موجب داشتن مقدار

- $1 - P(T > t)$

- مشتق گیری از

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- منجر به

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

توزیع نمائی -

در نتیجه تابع چگالی توزیع نمائی

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

نتیجه تابع تجمیع توزیع نمائی

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

توزیع نمائی - میانگین و وردائی

میانگین

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

وردائی

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

خاصیت بی حافظگی

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \forall s, t \geq 0$$

اثبات [؟]

بدردبخور

- خرید دستگاهی الکتریکی در ده سال پیش
- احتمال آنکه سه سال دیگر کار کند (یعنی در کل ۱۳ سال) دقیقاً برابر با احتمال خرید دستگاهی جدید در سه سال دیگر کار کند

$$P\{X > 13 | X > 10\} = P\{X > 3\}$$

▪ منطقی؟

▪ پس برای چه کاربرد دارد؟

▪ تصادف خودرو

▪ شانس تصادفی خودروی شما با تصادفی که دیروز داشتید کاهش یا افزایش نمی‌یابد.

مثال

میانگین زمان گذراندن در بانک ده دقیقه است. پس $\lambda = \frac{1}{10}$

سوال - احتمال گذراندن بیشتر از ۱۵ دقیقه

$$P(X > 15) = e^{-15\lambda} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.223$$

سوال - احتمال گذراندن بیشتر از ۱۵ دقیقه با دانستن اینکه وی تاکنون بیشتر از ده دقیقه در بانک مانده است؟

$$P(X > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607$$

مثال

اداره پست با دو کارمند

▪ هر کدام مشغول خدمت‌دهی به مشتری‌های متفاوت. مشتری سوم می‌شود. کار وی به محض پایان یافتن کار یکی از دو مشتری فعلی

▪ زمان خدمت‌دهی به مشتری دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$

▪ سوال - احتمال اینکه مشتری سوم از بین سه مشتری آخرینی باشد که اداره را ترک می‌کند؟

▪ $\frac{1}{2}$

توزیع برنولی

آزمایش دارای دو برآمد پیروزی و شکست، و احتمال متناظر θ و $1 - \theta$

$X \sim (\theta)$ برنولی

$$0 \leq \theta \leq 1$$

شیر=1

خط=0

$$f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}, x = 0, 1$$

توزیع برنولی

$X \sim \text{برنولی}(\theta)$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

شیر=1

خط=0

$$E[X] = \theta$$
$$\text{Var}[X] = \theta(1 - \theta)$$

تقریب

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $o(h)$

تابع $f(x) = x^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$$P(t < X < t + h) \approx f(t)h$$

$$P(t < X < t + h | X > t) \approx \lambda(t)h$$

$$P(t < X < t + h) = f(t)h + o(h)$$

$$P(t < X < t + h | X > t) = \lambda(t)h + o(h)$$

فرایند پواسن

فرایند تصادفی (شمارشی) دربرگیرنده هر دو مفهوم استقلال و توزیع پواسنی

تعریف- فرایند پواسن با آهنگ یا سرعت $\lambda > 0$ فرایندی تصادفی و مقدار صحیح $\{X(t), t \geq 0\}$ که

$$X(0) = 0 \quad \blacksquare$$

۲- برای هر زمان $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ افزایش‌های فرایند

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

متغیرهای تصادفی مستقل هستند

۳- مقادیر $s \geq 0$ و $h > 0$ ، متغیر تصادفی $X(s+h) - X(s)$ دارای توزیع پواسنی زیر است

$$P(X(s+h) - X(s) = x) = \frac{(\lambda h)^x e^{-\lambda h}}{x!}$$

و میانگین $E[X(h)] = \lambda h$ و واریانس برابر $Var[X(h)] = \lambda h$

فرایند پواسن

فرایند تصادفی (شمارشی) دربرگیرنده هر دو مفهوم استقلال و توزیع پواسنی

تعریف- فرایند پواسن با آهنگ یا سرعت $\lambda > 0$ فرایندی تصادفی و مقدار صحیح $\{X(t), t \geq 0\}$ که

$$X(0) = 0 \quad \blacksquare$$

۲- برای هر زمان $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ افزایش‌های فرایند

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

متغیرهای تصادفی مستقل هستند

۳- مقادیر $s \geq 0$ و $h > 0$ ، متغیر تصادفی $X(s+h) - X(s)$ دارای توزیع پواسنی زیر است

$$P(X(s+h) - X(s) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(s+h) - X(s) \geq 2) = o(h)$$

فرایند پواسن

T_1 نشان دهنده زمان اولین پیشامد فرایندی پواسنی
 $\{X(t), t \geq 0\}$ ▪

$$T_1 = \min\{t \geq 0: X(t) = 1\}$$

$$P_0(t) = P\{X(t) = 0\}$$

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{X(t+h) = 0\} \\ &= P\{X(t) = 0, X(t+h) - X(t) = 0\} \\ &= P\{X(t) = 0\}P\{X(t+h) - X(t) = 0\} \\ &= P_0(t)\{1 - \lambda h + o(h)\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + o(h)$$

تقسیم بر h و سپس $h \rightarrow 0$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

انتگرال

$$\log(P_0(t)) = -\lambda t + C$$

یا

$$P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$$

یا $P_0(0) = 1$ پس $K = 1$

$$P(T_1 > t) = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

فرایند پواسن

قضیه $\{X(t), t \geq 0\}$ فرایند پواسن با آهنگ λ و $X(t)$ متغیر تصادفی پواسن با آهنگ λt

$$P(X(t) = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

فرایند پواسن - اثبات

$$P(X(t) = x) = \int_0^t P(X(t) = x | S_x = s) \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{x-1}}{(x-1)!} ds$$

▪ هنگام $s > t$

$$P(X(t) = x | S_x = s) = 0$$

▪ هنگام $0 < s < t$

$$\begin{aligned} P(X(t) = x | S_x = s) &= P(T_{x+1} > t - s | T_1 + T_2 + \dots + T_x = s) \\ &= P(T_{x+1} > t - s) = e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X(t) = x) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{x-1}}{(x-1)!} ds = e^{-\lambda t} \lambda^x \int_0^t \frac{s^{x-1}}{(x-1)!} ds \\ &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \end{aligned}$$

کاربردها

مدل سازی زمان انتظار

مدل سازی اطمینان پذیری (شکست)

مدل سازی زمان خدمت

چه زمان‌هایی توزیع نمایی کاربرد ندارد

▪ تغییر آهنگ شکست در طول زمان

مدل سازی

مثال -

خرابی کابل زیردریا فرایندی پواسن با $\lambda = 0.1$ در هر کیلومتر است.

- الف- احتمال عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه
- ب- عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه، مطلوب است احتمال عدم خرابی در کیلومتر دو تا سه

▪ الف- $X(2)$ توزیع پواسن با ضریب $0.2 = 0.1 \times 2$. پس $P\{X(2) = 0\} = e^{-0.2} = 0.8187$

▪ ب- استفاده از استقلال $X(3) - X(2)$ و $X(2) - X(0) = X(2)$ احتمال شرطی برابر احتمال غیرشرطی

مثال فرایند پواسن مکانی

خرابی کابل زیردریا فرایندی پواسن با $\lambda = 0.1$ در هر کیلومتر است.

- الف- احتمال عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه
- ب- عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه، مطلوب است احتمال عدم خرابی در کیلومتر دو تا سه

الف- $X(2)$ توزیع پواسن با ضریب $0.2 = 0.1 \times 2$ پس $P\{X(2) = 0\} = e^{-0.2} = 0.8187$

ب- استفاده از استقلال $X(3) - X(2)$ و $X(2) - X(0) = X(2)$ احتمال شرطی برابر احتمال غیرشرطی

$$P\{X(3) - X(2) = 0\} = P\{X(1) = 0\} = e^{-0.1} = 0.9048$$

فرایند پواسن مکانی

جانشینی فضا به جای زمان

▪ خرابی در طول کابل

▪ سه بعدی - ستاره در فضا

مثال -

مراجعه مشتری به فروشگاه فرایندی پواسن با $\lambda = 4$ در هر ساعت است. شروع کار مغازه راس 9 صبح. احتمال مراجعه دقیقاً یک مشتری تا 9:30 و پنج نفر تا 11:30 صبح

الف - $P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right\}$

استفاده از استقلال $X\left(\frac{5}{2}\right) - X\left(\frac{1}{2}\right)$ و $X\left(\frac{1}{2}\right)$ جهت تدوین مسئله

$$\begin{aligned} P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right\} &= P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) - X\left(\frac{1}{2}\right) = 4\right\} \\ &= \left\{ \frac{e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)} 4^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{1!} \right\} \left\{ \frac{e^{-4(2)} (4(2))^4}{4!} \right\} \\ &= (2e^{-2}) \left(\frac{512}{3} e^{-8} \right) = 0.0154965 \end{aligned}$$

سخن کوتاه

متغیر تصادفی پواسن X با میانگین Λ

▪ مقادیر آن صرفاً عدد صحیح نامنفی

$$P\{X = x\} = \frac{e^{-\Lambda} \Lambda^x}{x!} \cdot$$

$$E[X] = Var[X] = \Lambda \cdot$$

متغیر تصادفی پواسن X با تابع آهنگ λ

▪ X فرایندی شمارشی است $X(0)=0$ و $t > 0$ آن گاه $X(t)$ غیر کاهشی است و صرفاً مقادیر عدد صحیح نامنفی است.

▪ X دارای افزایش‌های مستقل است، هر مجموعه افزایش‌های $X(t_j + h_j) - X(t_j)$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ مستقل است

▪ برای همه $t \geq 0$ و $h > 0$ ، افزایش $X(t + h) - X(h)$ متغیر تصادفی پواسن با میانگین $\Lambda = \int_t^{t+h} \lambda(z) dz$ است.

▪ $E[X] = \int_0^t \lambda(z) dz$ تابع مقدار میانگین خوانده می‌شود و $E[X] = \int_0^t \lambda(z) dz$

▪ اگر تابع آهنگ λ ثابت باشد، آن گاه X «فرایند پواسن همگن» خوانده می‌شود

سخن کوتاه- تعاریف متفاوت فرایندهای پواسنی

۱- احتمال پیشامد متناسب با عرض بازه‌ها (استقلال بازه‌ها)
▪ مدل فیزیکی

۲- احتمال توزیع پیشامدها بین $(0, t]$ پواسنی است $X(t)$ یا $N(t)$
▪ پیشامد-محور- تعداد پیشامدها در بازه‌های زمانی داده شده
▪ امکان به تحلیل و شبیه‌سازی
▪ استفاده هنگام نیاز به اطلاعات تعداد پیشامدها در زمان داده شده

۳- توزیع احتمال زمان‌های بین دریافت‌ها نمائی است $T(n)$
▪ زمان-محور- زمان‌های رخداد پیشامدها
▪ امکان تحلیل و شبیه‌سازی
▪ استفاده هنگام نیاز به اطلاعات زمان‌های پیشامد

تحریر محل نزاع فرایند پواسنی
 $\{N(t) \geq n\} = \{T(n) \leq t\}$

سخن کوتاه - تعاریف متفاوت فرایندهای پواسنی

مثال - شمارش تعداد بازدیدهای تارمانه از ۶ تا ۶:۱۰ عصر

۱- احتمال پیشامد متناسب با عرض بازه‌ها (استقلال بازه‌ها)

▪ مدل فیزیکی

▪ فرایند پواسنی؟ احتمال بازدید متناسب با طول بازه زمانی

▪ بازدیدهای مستقل در بازه‌های زمانی مجزا

▪ مدل چون فرایند پواسن با آهنگ تعداد بازدید بر ثانیه

۲- احتمال توزیع پیشامدها بین $(0, t]$ پواسنی است

▪ بازدید در $(s, s + t]$ پواسن با پارامتر λt

▪ احتمال دقیقا پنج بازدید در یک ثانیه $P(N(1) = 5) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^5}{5!}$

▪ تعداد موردانتظار بازدید در ده دقیقه $E(N(600)) = 600\lambda$

▪ N بازدید در ۱۰ دقیقه $\hat{\lambda} = \frac{N}{60}$

۳- توزیع احتمال زمان‌های بین دریافت‌ها نمائی است

▪ زمان‌های بین بازدید مستقل یکسان $T_i \sim e^\lambda$

▪ زمان مورد انتظار بین بازدیدها $E[T_i] = \frac{1}{\lambda}$

▪ زمان مورد انتظار بازدید n : $\sum_{i=1}^n E[T_i] = \frac{n}{\lambda}$

فرایند پواسن و فرایند شمارشی

فرایند پواسن

▪ فرایندی تصادفی که متغیر تصادفی $X(t)$ دارای مقادیر نمونه برداری ناپیوسته، افزایش ایستای مستقل، و دارای توزیع پواسن

فرایند شمارشی

▪ فرایندی تصادفی که متغیر تصادفی $X(t)$ دارای مقادیر نمونه برداری ناپیوسته، افزایش ایستای مستقل، و دارای توزیع دلخواه

منابع

“Basic Concepts of the Poisson Process,”

https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_1_2_basic_concepts_of_the_poisson_process.php, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

A. Kim, “Poisson Distribution — Intuition, Examples, and Derivation,” <https://towardsdatascience.com/poisson-distribution-intuition-and-derivation-1059aeab90d>, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

A. Kim, “Exponential Distribution — Intuition, Derivation, and Applications,” <https://towardsdatascience.com/what-is-exponential-distribution-7bdd08590e2a>, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

James W. Daniel, “Poisson processes (and mixture distributions),” 2019

[راس]

[پینسکی]

[متئوس]

[ریبیرو]